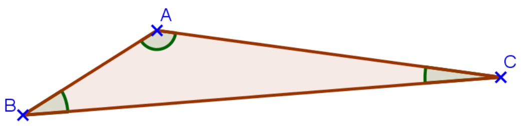
Chapitre n°10 : « Les triangles »

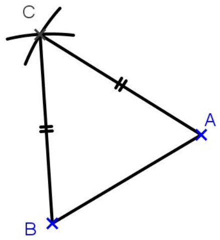
I. Rappels

Vocabulaire

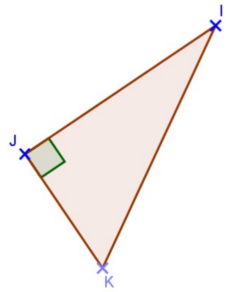


- Les sommets sont A, B, C.
- Les côtés sont $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$.
- Les angles sont $\widehat{ACB}$, $\widehat{CAB}$ et $\widehat{ABC}$.
- Le côté $[AB]$ est opposé au sommet C. Le sommet A est opposé au côté $[BC]$.

Triangles particuliers

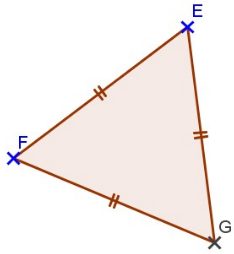


- Un triangle isocèle est un triangle qui possède deux côtés de même longueur.
Le côté $[AB]$ s'appelle la base. Le sommet C est le sommet principal.



- Un triangle rectangle est un triangle qui possède un angle droit.
Le côté $[IK]$ situé en face de l'angle droit est appelé l'hypoténuse.

- Un triangle équilatéral est un triangle qui a ses trois côtés de même longueur.



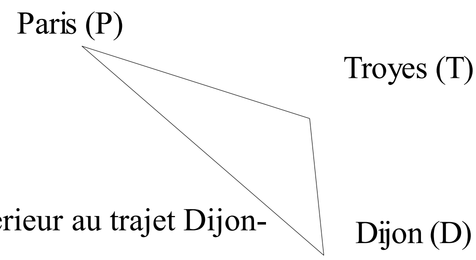
Triangle quelconque

Un triangle quelconque est un triangle qui n'est pas isocèle, rectangle ou équilatéral.

II. Inégalité triangulaire ; constructions de triangle

1/ Inégalité triangulaire

D'après le schéma ci-contre :

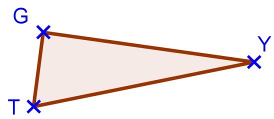


- le trajet Paris-Dijon est inférieur au trajet Dijon-Troyes plus Troyes-Paris.
- De même : $TP < TD + DP$ et $TD < TP + PD$

Un autre exemple

Donne les inégalités possibles dans le triangle TYG suivant :

- $TY < TG + GY$
- $TG < TY + YG$
- $YG < YT + TG$



Propriété : « Inégalité triangulaire »

Dans un triangle, la longueur d'un côté est inférieure à la somme des longueurs des deux autres côtés.

Cas d'égalité

Imaginons un triangle ABC tel que $AB + BC = AC$. Qu'est-ce que cela donne ?
Le chemin pour aller de A vers C est identique au chemin allant de A vers B puis de B vers C. Donc $B \in [AC]$.

2/ Construction type 1

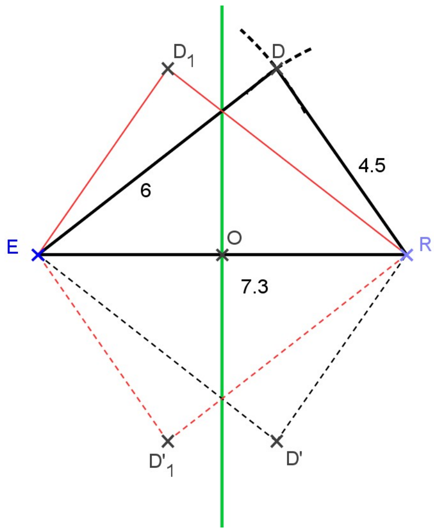
« On connaît les longueurs des trois côtés »

Exemples

Construis un triangle ERD tel que $ER=7{,}3\ cm$, $RD=4{,}5$ et $DE=6\ cm$.

Méthode

- On commence par tracer le côté le plus long.
- A l'aide du compas, en utilisant les longueurs données, on trace deux arcs de cercle qui se croisent.
- On relie les points.



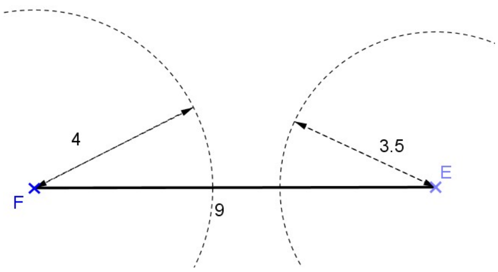
Rappels sur les symétries

- Symétrie axiale : A et A' sont symétriques par rapport à un axe (d) si (d) et (AA') sont perpendiculaires, et si (d) passe par le milieu de $[AA']$.

Cas où la construction est impossible

On considère les longueurs suivantes $EF=9\ cm$, $EG=3{,}5\ cm$ et $GF=4\ cm$.

On observe que les arcs de cercle ne se croisent pas : c'est logique, puisque $3{,}5+4$ n'est pas supérieur à 9 !

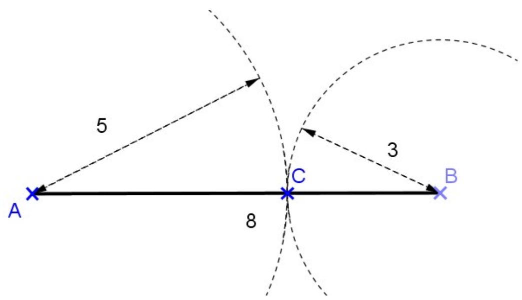


Cas d'égalité

Que se passe-t-il si dans un triangle ABC, on a $AB=8\ cm$, $BC=3\ cm$ et $CA=5\ cm$?

On remarque que les arcs de cercle se croisent sur (ou presque) le segment $[AB]$.

En théorie, $C\in[AB]$.



3/ Construction type 2

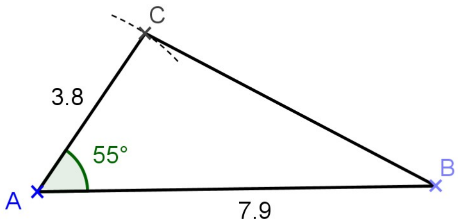
« On connaît deux côtés et l'angle formé par les deux côtés »

Exemple

Construis le triangle ABC tel que $AB=7{,}9\ cm$, $AC=3{,}8\ cm$ et $\widehat{BAC}=55°$.

Méthode

- On commence par tracer le côté le plus long.
- A partir de ce côté, on construit l'angle avec la mesure donnée.
- Sur le $2^{ème}$ côté de l'angle, on fait un arc de cercle qui correspond à la $2^{ème}$ longueur donnée.
- On relie pour former le $3^{ème}$ côté.



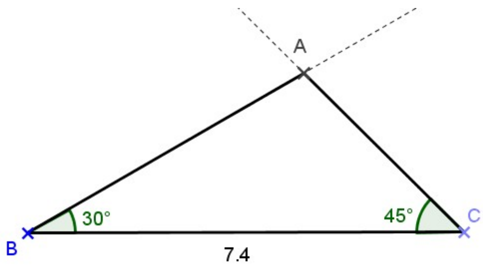
4/ Construction type 3

« On connaît un côté et ses angles adjacents »

Exemple

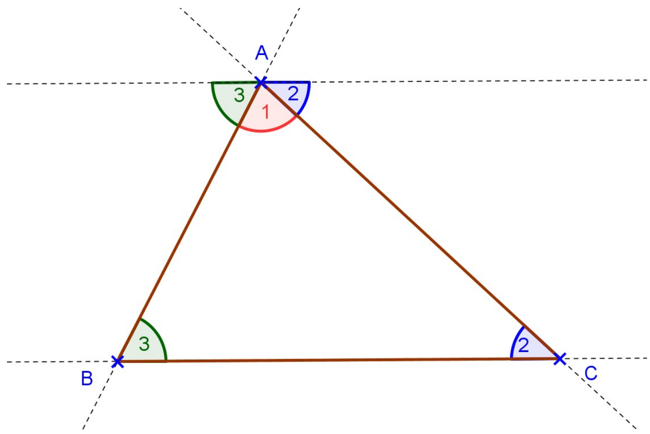
Construis le triangle ABC tel que $BC=7{,}4\ cm$, $\widehat{ABC}$=30° et $\widehat{ACB}$=45°.

- On construit le côté dont on connaît la longueur.
- A l'aide du rapporteur, aux extrémités, on construit les deux angles.
- On relie les sommets.



III. Somme des angles d'un triangle

Activité



- En traçant la droite parallèle à (BC) passant par A, on voit apparaître des angles alternes-internes.
- Cela permet de déplacer les angles 2 et 3 à côté de l'angle 1.
- On observe alors trois angles adjacents qui forment un angle plat.

D'où la propriété fondamentale suivante...

Propriété

Dans un triangle, la somme des mesures des angles est égale à $180°$.

Application

On considère un triangle YHU tel que $\widehat{YUH}=34°$ et $\widehat{YHU}=57°$.
Calcule la mesure manquante.

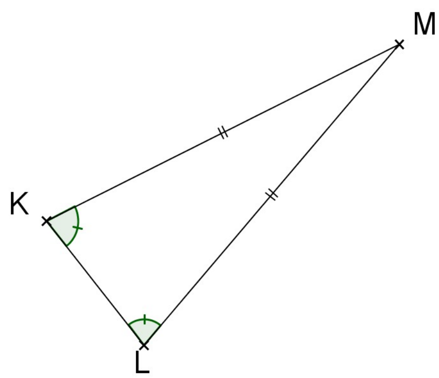
$\widehat{HYU}=180-(34+57)$

$\widehat{HYU}=180-91$

$\widehat{HYU}=89°$

IV. Triangles particuliers

1/ Isocèle



Propriété

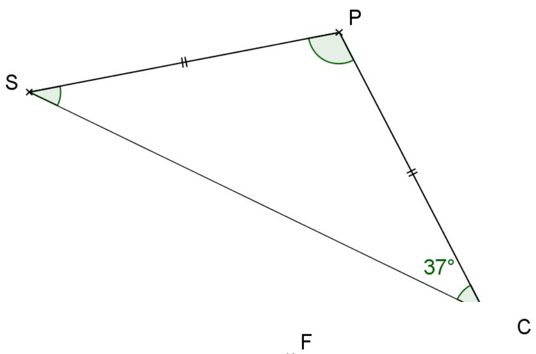
Dans un triangle isocèle, les angles à la base sont de même mesure.

Vocabulaire

Les angles à la base sont les deux angles construits à partir de la base.

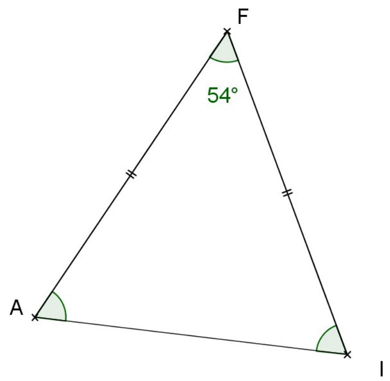
Applications

- Calcule les mesures manquantes



$\widehat{CSP}=37°$ car les angles à la base sont de même mesure.
$\widehat{SPC}=180-(37+37)$
$\widehat{SPC}=180-74$
$\widehat{SPC}=106°$

- Même question

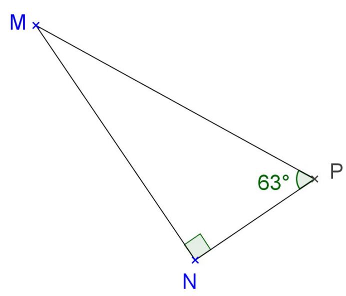


$\widehat{FAI}+\widehat{FIA}=180-54=126°$
$\widehat{FAI}=\widehat{FIA}=126\div2=63°$ car les deux angles à la base sont de la même mesure.

Remarque
Dans un triangle isocèle, un angle suffit pour pouvoir calculer les deux autres.

2/ Triangles rectangles

Exemple
On considère un triangle rectangle MNP. Il est rectangle en N et l'hypoténuse est $[MP]$.
Calcule $\widehat{NMP}$.



- 1ère méthode :
  $\widehat{NMP}=180-(90+63)=180-153=27°$

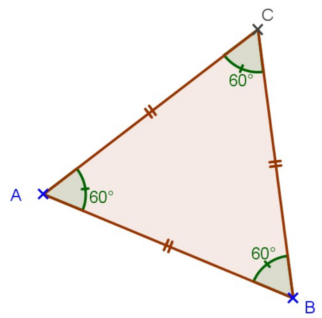
- 2ème méthode :
  Puisque $\widehat{MNP}$ =90° alors $\widehat{NMP}+\widehat{NPM}$ =90° ; donc $\widehat{NMP}$ =90-63=27°.

Propriété
Dans un triangle rectangle, les deux angles aigus sont complémentaires.

Méthode
Si on connaît la mesure d'un angle aigu, on fait la différence avec 90° pour obtenir la mesure de l'autre angle aigu.

3/ Triangle équilatéral

Propriété
Dans un triangle équilatéral, les trois angles (ou chaque angle) mesurent 60°.

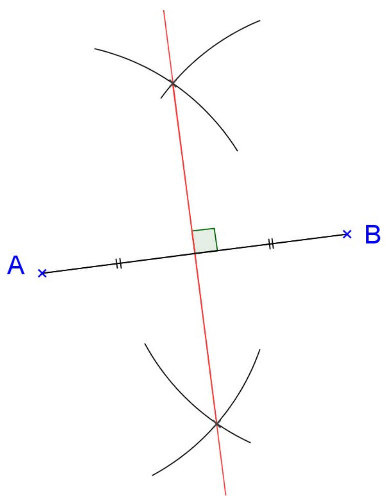


V. Droites remarquables dans un triangle

1/ Médiatrices et cercle circonscrit

Rappels

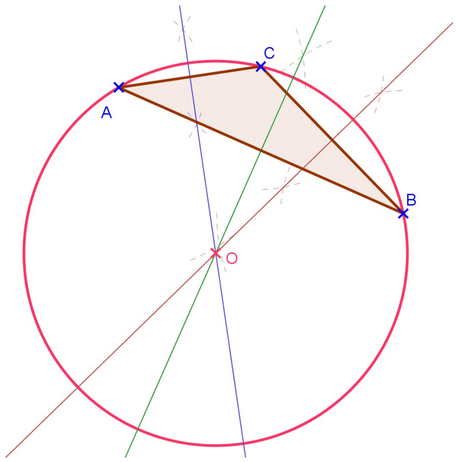
- La médiatrice d'un segment est la droite passant par son milieu et qui est perpendiculaire.
- Construction au compas :



Médiatrices dans un triangle

On observe que :

- les médiatrices sont concourantes en point O ;
- que le cercle de centre O et de rayon OA passe aussi par les sommets B et C.

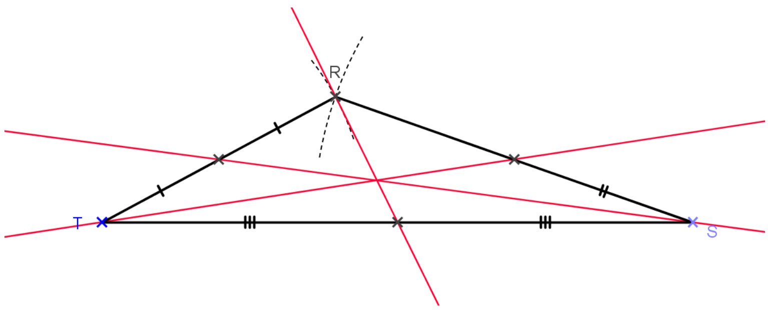


Propriété/Définition
Les trois médiatrices d'un cercle sont concourantes en un point appelé le centre du cercle circonscrit.
Le cercle circonscrit est le cercle passant par les trois sommets du triangle.

2/ Médianes d'un triangle

Définition
Dans un triangle, une médiane est une droite passant par **un sommet** et le **milieu** du côté opposé à ce sommet.

Illustration
Trace un triangle RTS quelconque puis construis ses trois médianes.



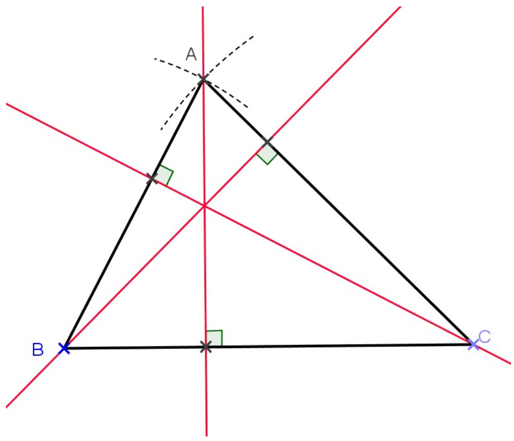
Propriété
Dans un triangle, les médianes sont concourantes.

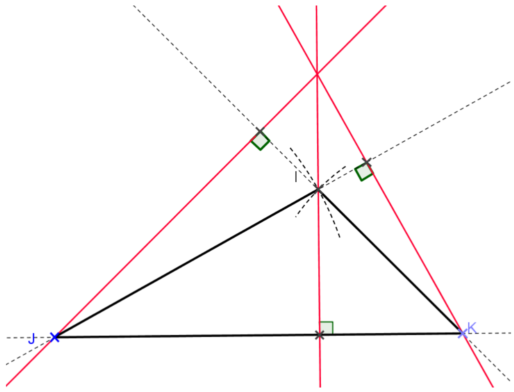
3/ Hauteurs d'un triangle

Définition

Une hauteur d'un triangle est une droite **passant par un sommet** et **perpendiculaire** au côté opposé à ce sommet.

Illustrations





Propriété

Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes :

- à l'intérieur du triangle lorsque les trois angles sont aigus ;
- à l'extérieur du triangle lorsqu'il y a un angle obtus.

Vocabulaire

Lorsqu'une hauteur ou une médiane passe par un sommet A,
on dit qu'elles sont issues de A.

Pour lundi

- Apprendre le cours
- n°48 p 180

Pour mardi 8/06

Contrôle sur le chapitre « Les triangles »