Chapitre 6 : « Trigonométrie : le cosinus »

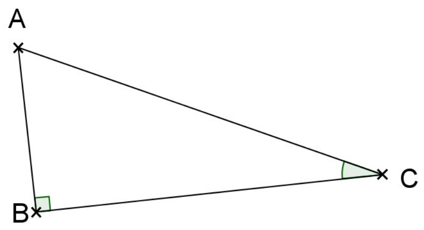
I. Rappels

1/ Vocabulaire des triangles rectangles

Définition
Un triangle rectangle est un triangle qui possède un angle droit. Le côté situé en face de l'angle droit est appelé l'hypoténuse. Les deux autres côtés sont les côtés de l'angle droit

Dans ce triangle ABC rectangle en B :

- $[AC]$ est l'hypoténuse car il est en face de B,
- $[BA]$ et $[BC]$ sont les deux côtés de l'angle droit car, à eux deux, ils forment l'angle droit.
- les angles $\widehat{BCA}$ et $\widehat{BAC}$ sont deux angles aigus.

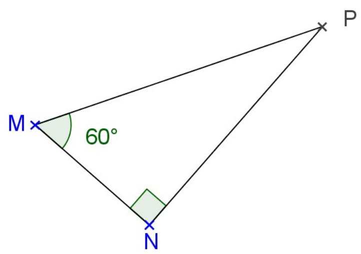


Propriétés

- Dans un triangle (quelconque), la somme des mesures des trois angles est égale à $180°$.
- Dans un triangle rectangle, les deux angles aigus sont complémentaires : leur somme est égale à $90°$.

Exemple

MNP est rectangle en N donc ses deux angles aigus sont complémentaires :
$\widehat{NPM} = 90 - \widehat{NMP}$
$\widehat{NPM} = 90 - 60$
$\widehat{NPM} = 30°$

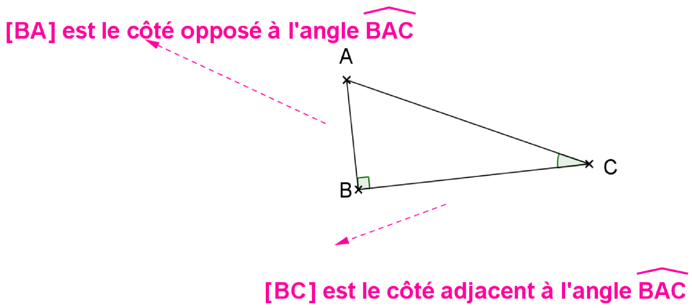


ou bien...

Dans le triangle MNP, la somme des angles est égale à $180°$, donc :
$\widehat{NPM} = 180 - (\widehat{NMP} + \widehat{MNP})$
$\widehat{NPM} = 180 - (60 + 90)$
$\widehat{NPM} = 180 - 150$
$\widehat{NPM} = 30°$

Définition

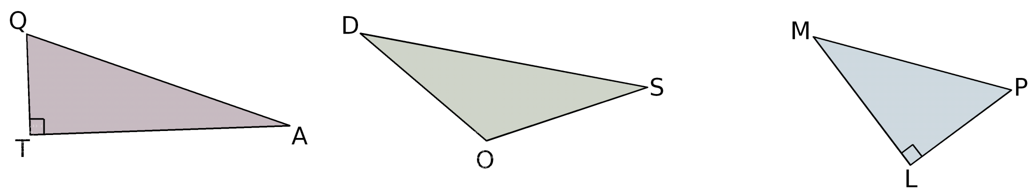
Dans un triangle ABC, rectangle en B, le côté adjacent à l'angle $\widehat{BCA}$ est le côté de l'angle qui n'est pas l'hypoténuse : c'est $[BC]$. Le côté opposé est le troisième côté : $[AB]$.



Remarques

« Côté adjacent » et « côté opposé » dépende de là, où l'on se trouve. Le côté adjacent de $\widehat{BAC}$ est $[AB]$ et son côté opposé est $[BC]$.

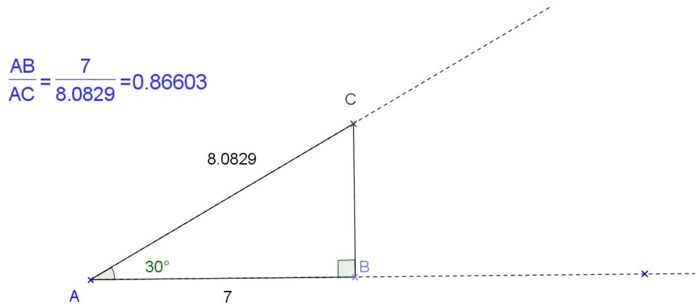
Exemples



Triangle rectangle en...	Hypoténuse	Nom de l'angle	Côté opposé	Côté adjacent
QTA en T	$[QA]$	$\widehat{TAQ}$	$[QT]$	$[AT]$
Même...	Même...	$\widehat{TAQ}$	$[AT]$	$[QT]$
MLP en L	$[PM]$	$\widehat{LMP}$	$[PL]$	$[ML]$
Même...	Même...	$\widehat{MPL}$	$[ML]$	$[PL]$

II. Cosinus d'un angle aigu (dans un triangle rectangle)

1/ Activité (à l'oral)



Avec un logiciel de géométrie, pour un angle donné, le quotient du côté adjacent sur l'hypoténuse est le même peu importe la taille du triangle.

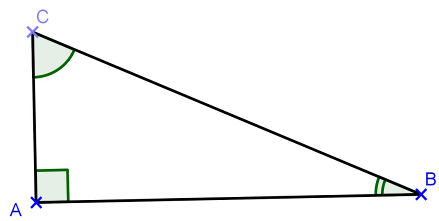
2/ A savoir parfaitement

Définition

Dans un triangle rectangle, le cosinus d'un angle aigu est égal au quotient du côté par l'hypoténuse.
On note $\cos(\ldots)$. La valeur du cosinus d'un angle aigu est donné par la touche cos de la calculatrice.

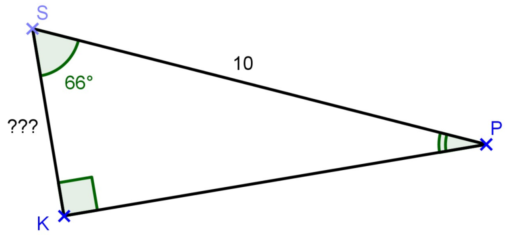
Illustration

- $\cos(\widehat{ACB}) = \dfrac{CA}{CB}$
- $\cos(\widehat{ABC}) = \dfrac{BA}{BC}$



3/ Application

Le cosinus fait le lien entre les mesures des angles et les longueurs des côtés



- On peut appliquer le cosinus car SKP est rectangle en K.
- $\cos(\widehat{KSP}) = \dfrac{SK}{SP}$
- $\cos(66) = \dfrac{SK}{10}$
  $\dfrac{\cos(66)}{1} = \dfrac{SK}{10}$
  $\cos(66) \times 10 = SK \times 1$
  $SK = \cos(66) \times 10$
- $SK \approx 4{,}0673\ldots$
  $SK \approx 4\ cm$

4/ Produits en croix

Exemple

Si j'ai deux quotients égaux $\dfrac{15}{45} = \dfrac{1}{3}$, cela se traduit par deux produits égaux $15 \times 3 = 1 \times 45$.

Propriété : « Produits en croix »

a, b, c et d représentent quatre nombres non nuls.

Si $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ alors $ad = bc$.

Exemples

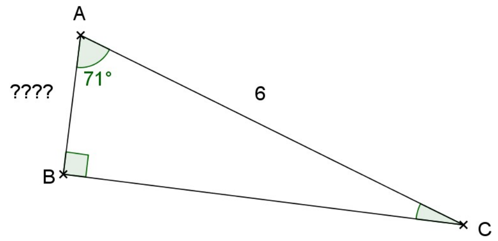
$\cos(32) = \dfrac{AM}{5{,}6}$
$\dfrac{\cos(32)}{1} = \dfrac{AM}{5{,}6}$
$5{,}6 \times \cos(32) = AM \times 1$
$AM = 5{,}6 \times \cos(32)$
$AM \approx 4{,}74906\ldots$
$AM \approx 4{,}7\ cm$ (arrondi au millimètre)

$\dfrac{9{,}8}{AB} = \cos(4{,}9)$
$\dfrac{9{,}8}{AB} = \dfrac{\cos(4{,}9)}{1}$
$9{,}8 \times 1 = AB \times \cos(4{,}9)$
$9{,}8 = AB \times \cos(4{,}9)$
$AB = \dfrac{9{,}8}{\cos(4{,}9)}$
$AB \approx 14{,}9376\ldots$
$AB \approx 14{,}9\ cm$ (arrondi au millimètre)

$\cos(85) = \dfrac{7}{IJ}$
$\dfrac{\cos(85)}{1} = \dfrac{7}{IJ}$
$IJ \times \cos(85) = 7 \times 1$
$IJ \times \cos(85) = 7$
$IJ = \dfrac{7}{\cos(85)}$
$IJ \approx 80{,}31599\ldots$
$IJ \approx 80{,}3\ cm$ (arrondi au millimètre)

5/ Exemples types (à savoir refaire)

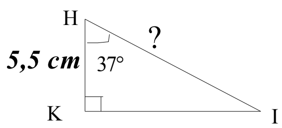
Exemple 1



- ABC est un triangle rectangle en B. On peut donc appliquer le cosinus.
- $\cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{BA}{AC}$
  $\cos(71) = \dfrac{BA}{6}$
  $\dfrac{\cos(71)}{1} = \dfrac{BA}{6}$
  $\cos(71) \times 6 = 1 \times BA$
- $BA = \cos(71) \times 6$
  $BA \approx 1{,}9534\ldots$
- $BA \approx 2\ cm$

Exemple 2

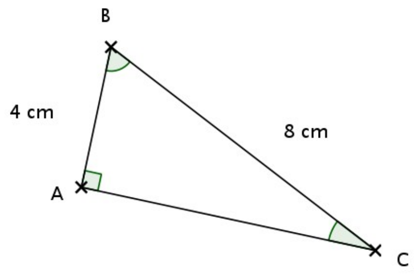
On considère un triangle IHK rectangle en K tel que $\widehat{IHK} = 37°$; $HK = 5{,}5\ cm$.



- Dans IHK triangle rectangle en K, on peut appliquer le cosinus.
- $\cos(\widehat{IHK}) = \dfrac{HK}{HI}$
  $\cos(37) = \dfrac{5{,}5}{HI}$
  $\dfrac{\cos(37)}{1} = \dfrac{5{,}5}{HI}$
  $\cos(37) \times HI = 5{,}5 \times 1$
  $\cos(37) \times HI = 5{,}5$
  $HI = \dfrac{5{,}5}{\cos(37)}$
  $HI \approx 6{,}5567\ldots$ (résultat donné par la calculatrice)
- $HI \approx 6{,}6\ cm$ (arrondi au millimètre près)

Exemple 3 : calculer une mesure d'angle

ABC est un triangle rectangle en A tel que $AB=4\ cm$ et $BC=8\ cm$. Calculer la mesure de $\widehat{ABC}$.



- Dans le triangle CAB rectangle en A, on peut appliquer le cosinus.
- $\cos(\widehat{ABC})=\frac{BA}{BC}$
  $\cos(\widehat{ABC})=\frac{4}{8}$
- La calculatrice permet de retrouver la mesure de l'angle lorsqu'on sait la valeur de son cosinus. On utilise la touche $\arccos(\ldots)$ ou $Acs(\ldots)$ ou $\cos^{-1}(...)$.
  $\arccos\left(\frac{4}{8}\right)=60$
  Cette valeur correspond à la mesure de $\widehat{ABC}$
- $\widehat{ABC}=60°$

A savoir faire

$7x=5$
$x=\frac{5}{7}$

$8=6AB$
$AB=\frac{8}{6}$
$AB=\frac{\cancel{2}\times4}{\cancel{2}\times3}$
$AB=\frac{4}{3}$

$8\times IJ=\cos(12)$
$IJ=\frac{\cos(12)}{8}$

$\cos(54)\times FG=4{,}5$
$FG=\frac{4{,}5}{\cos(54)}$

Rappels : arrondi

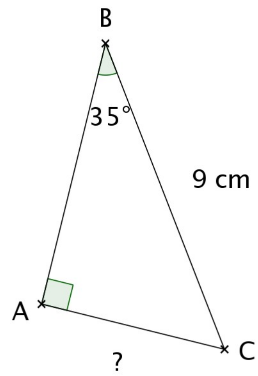
Le principe de l'arrondi, c'est donner la valeur la plus proche en gardant plus ou moins de chiffres dans la partie décimale.

- Arrondi de $\frac{\cos(12)}{8}$ au dixième : puisque la calculatrice donne $0{,}12226845\ldots$, la valeur la plus proche à un chiffre après la virgule est $0{,}1$.
- Même question avec $\frac{4{,}5}{\cos(54)}$: la calculatrice donne $7{,}6558572\ldots$, l'arrondi est donc $7{,}7$.
- Arrondi à l'unité de $6\times\cos(78)$: la calculatrice donne $1{,}2474\ldots.$, l'arrondi est 1.

Un exemple plus difficile...

- 1ère étape : « Calcul de l'angle $\widehat{ACB}$ »

On sait que, dans un triangle rectangle, les angles aigus sont complémentaires.
Donc :
$\widehat{ACB}=90-\widehat{ABC}$
$\widehat{ACB}=90-35$
$\widehat{ACB}=55°$



- 2ème étape : « On applique le cosinus »

Le triangle ABC est rectangle en A, on peut donc appliquer le cosinus.

$\cos(\widehat{ACB})=\frac{CA}{CB}$

$\cos(55)=\frac{CA}{9}$

$\frac{\cos(55)}{1}=\frac{CA}{9}$

$\cos(55)\times 9=CA\times 1$

$CA=\cos(55)\times 9$

$CA \approx 5{,}2\ cm$ (arrondi au millimètre près)

6/ Constructions de triangles rectangles

Énoncé
Construire le triangle ABC, rectangle en C, tel que $CA=3\ cm$ et $AB=6\ cm$

Figure à main levée

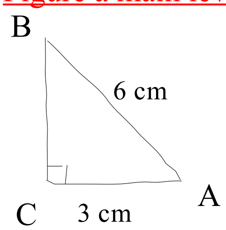
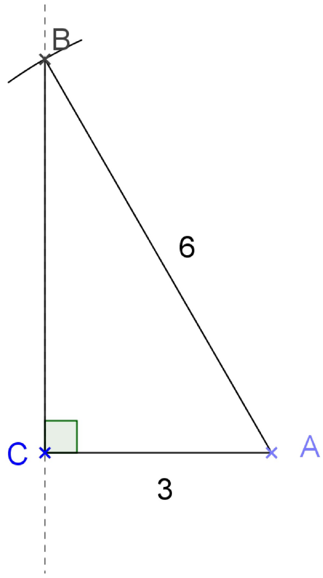


Figure aux instruments



Pour mardi 8 février

- Apporter le cahier de cours (je les note !!)
- Contrôle 1 h : calculatrice+matériel de géométrie