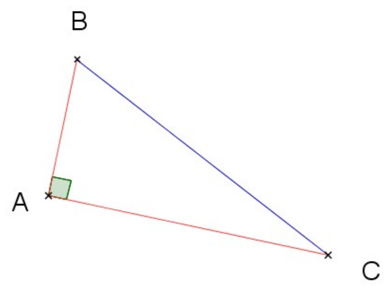
Trigonométrie : le cosinus

I. Rappels

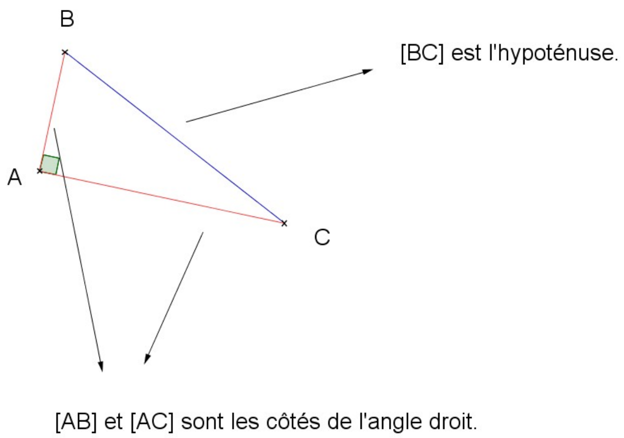
1/ Vocabulaire des triangles rectangles



Définition
Un triangle rectangle est un triangle qui possède un angle droit.

Vocabulaire

- Le côté situé en face de l'angle droit s'appelle l'hypoténuse. Les deux autres côtés s'appellent les côtés de l'angle droit

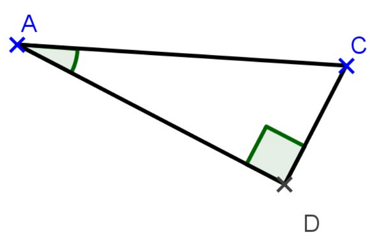


Propriété

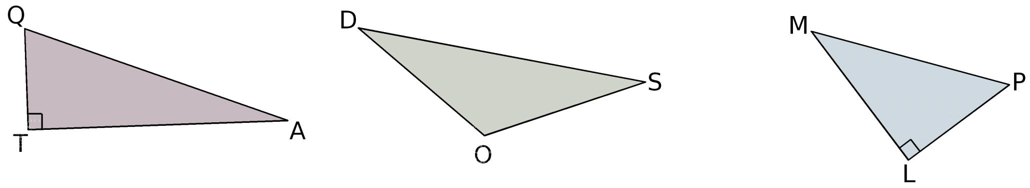
- L'hypoténuse est le côté le plus long.
- Les deux angles aigus sont complémentaires (c'est à dire leur somme est égale à $90°$)
- Dans tous les triangles, la somme des mesures des angles est $180°$.

Définition
On considère le triangle ci-contre et l'angle $\widehat{CAD}$.

- Le côté opposé à $\widehat{CAD}$ est $[CD]$ car il est situé en face.
- Le côté adjacent à $\widehat{CAD}$ est $[AD]$ car c'est le côté de l'angle $\widehat{CAD}$ qui n'est pas l'hypoténuse.



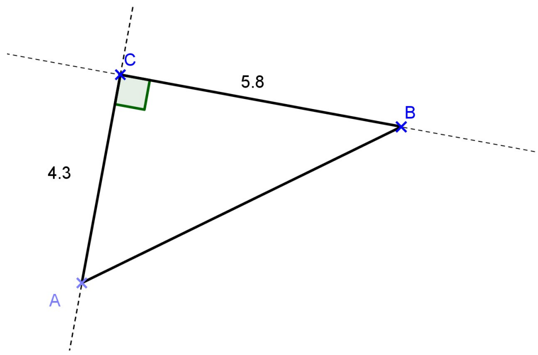
Exemples



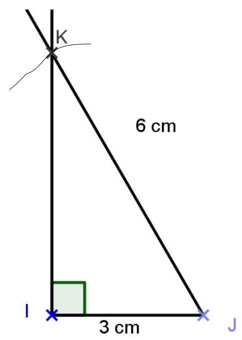
Triangle rectangle en...	Hypoténuse	Nom de l'angle	Côté opposé	Côté adjacent
QTA en T	$[QA]$	$\widehat{QAT}$	$[QT]$	$[TA]$
DSO pas rectangle	rien	rien	rien	rien
LPM en L	$[MP]$	$\widehat{LMP}$	$[PL]$	$[LM]$

2/ Constructions de triangles rectangles

- 1ère construction : construis un triangle ABC, rectangle en C, tel que $AC=4{,}3\ cm$ et $CB=5{,}8\ cm$.



- 2ème construction : construis IJK, rectangle en I tel que $IJ=3\ cm$ et $JK=6\ cm$

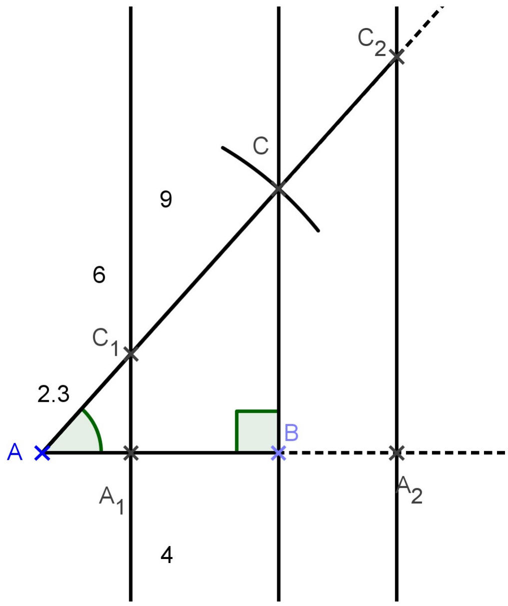


Cette construction est à connaître. Attention, à bien faire apparaître l'arc de cercle en K

II. Cosinus d'un angle aigu

1/ Activité

Construis un triangle ABC rectangle en B tel que $AB=4\,cm$ et $AC=6\,cm$. Place un point A_1 sur $[AB]$ tel que $AA_1=1{,}5\,cm$. Trace la perpendiculaire à (AB) passant par A_1. Elle coupe (AC) en C_1. Place un point A_2 sur $[AA_2)$ tel que $AA_2=6\ cm$. Trace une perpendiculaire à (AB) passant par A_2. Elle coupe $[AC)$ en C_2.



Calculons les quotients suivants :

$\frac{AA_1}{AC_1}=\frac{1{,}5}{2{,}2}\approx 0{,}7$

$\frac{AB}{AC}=\frac{4}{6}\approx 0{,}7$

$\frac{AA_2}{AC_2}=\frac{6}{9}\approx 0{,}7$

Quelques remarques....

- Les dénominateurs correspondent à l'hypoténuse dans les triangles AA_1C_1, ABC et AA_2C_2
- Dans les mêmes triangles, les numérateurs correspondent au côté adjacent de l'angle de sommet A : $\widehat{C_1AA_1}$; $\widehat{CAB}$; $\widehat{C_2AA_2}$
- Les quotients de longueurs dépendent de la mesure de l'angle de sommet A

Mesurons cette angle : on mesure au rapporteur environ $48\,°$.
Avec la calculatrice, calcule $\cos(48)$: la calculatrice affiche $0{,}6691306...$.
Donc $\cos(48)\approx 0{,}7$

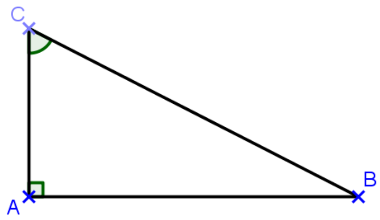
2/ L'essentiel à parfaitement connaître

Définition

Dans un triangle rectangle, le cosinus d'un angle aigu est égal au quotient du côté adjacent (à l'angle aigu) sur l'hypoténuse.

Illustration/Notation

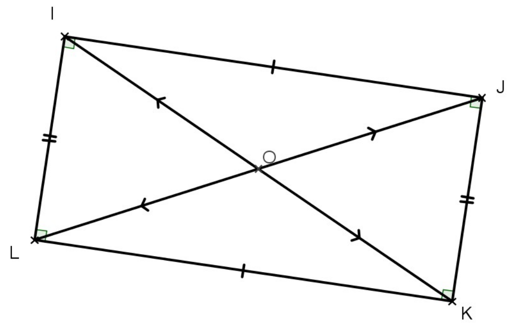
On se place au niveau de l'angle de sommet C : $\widehat{ACB}$. Le côté opposé est $[AB]$ et le côté adjacent est $[AC]$. Le côté restant est l'hypoténuse : $[BC]$.
Le cosinus de l'angle $\widehat{ACB}$ se note $\cos(\widehat{ACB})$



On a donc $\cos(\widehat{ACB})=\frac{AC}{BC}$

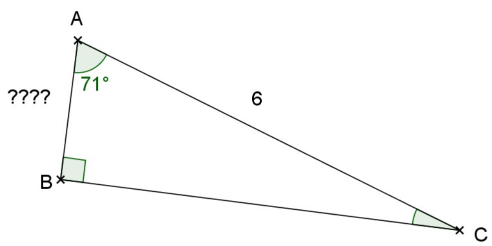
Exemple
On considère un rectangle $IJKL$. Trace la diagonale IK et $[JL]$

$\cos(\widehat{OIJ})=\frac{IJ}{IK}$
$\cos(\widehat{JLK})=\frac{LK}{LJ}$
$\cos(\widehat{LKI})=\frac{LK}{IK}$



III. Cosinus : applications

1/ Calculer une longueur dans un triangle rectangle



- 1ère étape : « On décrit la configuration qui permet d'appliquer le cosinus »

Le triangle ABC est rectangle en B, on peut donc appliquer le cosinus.

- <u>2ème étape</u> : « On donne la formule du cosinus avec les lettres de la figure »

$\cos(\widehat{BAC})=\frac{AB}{AC}$

- <u>3ème étape</u> : « On remplace par les données numériques »

$\cos(71)=\frac{AB}{6}$

- <u>4ème étape</u> : « On exprime AB en fonction du reste.... »

On utilise le produit en croix !!!!

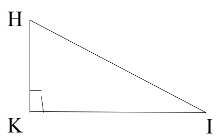
$\frac{\cos(71)}{1}=\frac{AB}{6}$
$\cos(71)\times 6=1\times AB$
$AB=\cos(71)\times 6$

- <u>5ème étape</u> : « On utilise la touche $\cos$ pour donner une valeur approchée »

$AB\approx 1{,}9534089....$
$AB\approx 2\ cm$

<u>Autre exemple : calculer l'hypoténuse....</u>
On considère un triangle IHK rectangle en K tel que $\widehat{IHK}=37°$; $HK=5{,}5\ cm$.

On peut appliquer le cosinus car IHK est rectangle en K.



$\cos(\widehat{IHK})=\frac{HK}{HI}$

$\cos(37)=\frac{5{,}5}{HI}$

$\frac{\cos(37)}{1}=\frac{5{,}5}{HI}$

$\cos(37)\times HI=5{,}5\times 1$
$\cos(37)\times HI=5{,}5$
$HI=\frac{5{,}5}{\cos(37)}$

La calculatrice donne $6{,}8837....$
Arrondi au millimètre près, cela donne :
$HI\approx 6{,}9\ cm$

Rappels

$7 \times x = 5$

$x = \frac{5}{7}$

$8 = 6 \times AB$

$AB = \frac{8}{6}$

$8 \times IJ = \cos(12)$

$IJ = \frac{\cos(12)}{8}$

$\cos(54) \times FG = 4{,}5$

$FG = \frac{4{,}5}{\cos(54)}$

$8{,}5 = JK \times \cos(32)$

$JK = \frac{8{,}5}{\cos(32)}$

2/ Rappels : arrondi

On peut faire des arrondis à l'unité, au dixième, au centième... L'idée de l'arrondi, c'est de trouver la valeur la plus proche d'un nombre donné à l'unité, au dixième, au centième...

Exemple
On arrondit des nombres dont la partie décimale est très importante. C'est le cas pour le cosinus d'un nombre.

$\cos(52)$: $0{,}61566147$ (affichage calculatrice)

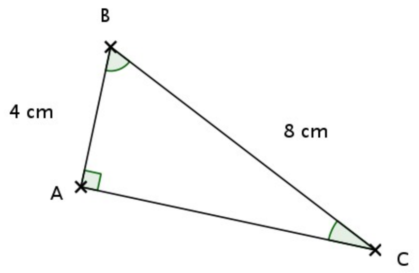
- Arrondi à l'unité : on a le choix entre 0 et 1 ; puisque $0{,}6....$ est plus proche de 1, donc l'arrondi à l'unité est 1.

3/ Calculer une mesure d'angle

Exemple

ABC est un triangle rectangle en A tel que $AB = 3{,}5\ cm$ et $BC = 7{,}5\ cm$. Calculer la mesure de $\widehat{ABC}$.

Méthode



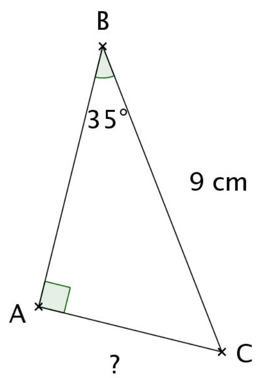
- 1ère étape : « On décrit la configuration qui permet d'appliquer le cosinus »
  Le triangle ABC est rectangle en A, on peut donc appliquer le cosinus.

- 2ème étape : « On donne la formule du cosinus avec les lettres de la figure »
  $\cos(\widehat{ABC})=\frac{AB}{BC}$

- 3ème étape : « On remplace par les données numériques »
  $\cos(\widehat{ABC})=\frac{3,5}{7,5}$

- 4ème étape : « On utilise la touche $\cos^{-1}$ ou bien $Arccos$ »
  Pour atteindre cette touche, on utilise une autre touche $SECONDE$ ou bien $2\,nde$ (en haut à gauche)
  $\arccos\left(\frac{3,5}{7,5}\right)\approx 62,1818..$ donc $\widehat{ABC}\approx 62°$ (arrondi au degré près).

4/ Plus difficile...



- 1e étape : « On change de point de vue »
  Pour cela, on calcule la mesure de $\widehat{ACB}$:
  $\widehat{ACB}=90-\widehat{ABC}=90-35=55°$ car les deux angles aigus sont complémentaires.

- 2e étape : « On applique le cosinus »
  Le triangle ABC est rectangle en A, on peut appliquer le cosinus :
  $\cos(\widehat{ACB})=\frac{AC}{CB}$
  $\cos(55)=\frac{AC}{9}$
  $\frac{\cos(55)}{1}=\frac{AC}{9}$
  $\cos(55)\times 9=AC\times 1$
- $AC=\cos(55)\times 9$
- $AC\approx 5,2\ cm$ (arrondi au millimètre)

Pour lundi 28/01
Contrôle d'une heure sur le chapitre en cours.