Chapitre n°9 : « Racines carrées »

I. Activités

La notion de « racine carrée » a déjà été abordée dans le chapitre sur le théorème de Pythagore. En fin de calcul, on avait par exemple :
$AB^2=36$
$AB=\sqrt{36}$
$AB=6$.
On a cherché le nombre dont le carré est égal à 36.
De même :
$\sqrt{49}=7$ car $7\times 7=49$; $\sqrt{81}=9$ car $9\times 9=81$; $\sqrt{10\ 000}=100$; $\sqrt{1}=1$; $\sqrt{0}=0$
Mais ce n'est pas toujours aussi facile...
$\sqrt{10}$ ne se calcule pas de tête ; on peut juste donner un encadrement entre deux entiers consécutifs. Puisque 10 est compris entre $3\times 3=9$ et $4\times 4=16$, on a $3<\sqrt{10}<4$
La calculatrice donne $3{,}16227766$ qui est une valeur approchée !
De même :
$7<\sqrt{52}<8$; $31<1000<32$; $4<\sqrt{20}<5$.

II. Racine carrée d'un nombre positif

Définition
a représente un nombre positif.
La racine carrée de a est le nombre qui mis au carré (ou multiplié par lui-même) donne a.
On le note $\sqrt{a}$

Exemples
$\sqrt{3600}=60$ car $60^2=3600$
$\sqrt{0{,}01}=0{,}1$ car $0{,}1\times 0{,}1=0{,}01$
$\sqrt{\frac{25}{81}}=\frac{5}{9}$ car $\frac{5}{9}\times\frac{5}{9}=\frac{5\times 5}{9\times 9}=\frac{25}{81}$.
$\sqrt{0{,}04}=0{,}2$ car $0{,}2^2=\frac{2}{10}^{2}=\frac{4}{100}=0{,}04$.

Remarques
Le symbole $\sqrt{...}$ s'appelle « radical ».

Conséquence importante de la définition

a représente toujours un nombre positif. On a :

$\sqrt{a}^{\,2}=a$ ou $\sqrt{a}\times\sqrt{a}=a$

On a traduit mathématiquement « La racine carrée de a est le nombre dont le carré est égal à a ».

A connaître par cœur

$0^2=0$; $1^2=1$; $2^2=4$; $3^2=9$; $4^2=16$; $5^2=25$; $6^2=36$; $7^2=49$; $8^2=64$; $9^2=81$; $10^2=100$; $11^2=121$; $12^2=144$; $13^2=169$; $14^2=196$; $15^2=225$

Remarque

Attention : $\sqrt{0{,}09}=0{,}3$; $\sqrt{0{,}36}=0{,}6$; etc.

Faire la différence entre : « Carré, racine carrée, double et moitié »

a	a^2 **carré de** a	$2a$ ***double de*** a	$\frac{a}{2}$ ***moitié de*** a	$\sqrt{a}$ ***racine carrée de*** a
9	81	18	4,5	3
4	16	8	2	2
1	1	2	0,5	1
2	4	4	1	$\sqrt{2}\approx1{,}41$
36	1296	72	18	6

III. Racines carrées et opérations

Activité

On remarque que :

- $\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$ et $\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}}=\frac{1}{2}$; la racine carrée semble « compatible » avec la division.
- $\sqrt{9}+\sqrt{16}=3+4=7$ et $\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$; on obtient un résultat différent.
- $\sqrt{36}\times\sqrt{144}=6\times12=72$ et $\sqrt{36\times144}=\sqrt{5184}=72$; la racine carrée semble « compatible » avec la multiplication aussi.
- Etc.

Propriété

a et b représentent deux nombres positifs. On a :

$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$; $\sqrt{a\times b}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$

Exemples
$\sqrt{12,5}\times\sqrt{2}=\sqrt{12,5\times2}=\sqrt{25}=5$
$\sqrt{50}=\sqrt{25\times2}=\sqrt{25}\times\sqrt{2}=5\times\sqrt{2}=5\sqrt{2}$
$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{50}}=\sqrt{\frac{2}{50}}=\sqrt{\frac{1}{25}}=\frac{1}{5}$
$\sqrt{\frac{2}{121}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{121}}=\frac{\sqrt{2}}{11}$

Remarque
Le symbole $\times$ disparaît devant le symbole radical $\sqrt{}$. Par exemple : $7-3\times\sqrt{2}=7-3\sqrt{2}$.

Carrés parfaits
Ce sont les résultats des nombres entiers au carré : 225 ; 144 ; 49 ; $10\,000$ ...

IV. Réduire une expression

1/ Exemples de base

- $A=-3\sqrt{2}+8\sqrt{5}-6\sqrt{2}-9\sqrt{5}$

Il faut faire le lien avec le calcul littéral. En effet, on peut voir les choses ainsi :

$A'=-3x+8y-6x-9y$
$A'=-9x-1y$
$A'=-9x-y$

De la même façon :

$A=-9\sqrt{2}-1\sqrt{5}$
$A=-9\sqrt{2}-\sqrt{5}$

- $A_1=7\sqrt{3}-5\sqrt{11}-12\sqrt{3}+18\sqrt{11}$
  $A_1=-5\sqrt{3}+13\sqrt{11}$

- $B=\sqrt{2}(5-3\sqrt{2})-8\sqrt{2}$
  $B=\sqrt{2}\times5+\sqrt{2}\times(-3\sqrt{2})-8\sqrt{2}$
  $B=5\sqrt{2}-3\times(\sqrt{2}\times\sqrt{2})-8\sqrt{2}$
  $B=5\sqrt{2}-3\times2-8\sqrt{2}$
  $B=-6-3\sqrt{2}$

  $B_1=\sqrt{3}(4-\sqrt{3})+5\sqrt{3}$
  $B_1=\sqrt{3}\times4-\sqrt{3}\times\sqrt{3}+5\sqrt{3}$
  $B_1=-3+4\sqrt{3}+5\sqrt{3}$
  $B_1=-3+9\sqrt{3}$

- $C=(-8+\sqrt{5})(3\sqrt{5}+2)$
  $C=-24\sqrt{5}-16+15+2\sqrt{5}$ (où $\sqrt{5}\times 3\sqrt{5}=3\sqrt{5}\times\sqrt{5}=3\times 5=15$)
  $C=-1-22\sqrt{5}$

2/ Mettre sous la forme $a\sqrt{b}$

Mettre $D=-6\sqrt{72}$ sous la forme $a\sqrt{b}$ signifie que b doit être le plus petit possible.
Comment faire ???

- On décompose 72 : il y a plusieurs possibilités !
  $72=6\times 12$; $72=8\times 9$; $72=2\times 36$
- Laquelle choisir ?
  Les deux dernières font apparaître les carrés parfaits 9 et 36. On va choisir $72=2\times 36$ afin d'obtenir un b le plus petit possible.
- Calculons :
  $D=-6\sqrt{72}$
  $D=-6\sqrt{36\times 2}$
  $D=-6\sqrt{36}\times\sqrt{2}$ (on applique $\sqrt{a\times b}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$)
  $D=-6\times 6\sqrt{2}$
  $D=-36\sqrt{2}$
- On a donc $a=-36$ et $b=2$.

Exemples

$\sqrt{12}=\sqrt{4\times 3}=\sqrt{4}\times\sqrt{3}=2\sqrt{3}$
$\sqrt{98}=\sqrt{49\times 2}=\sqrt{49}\sqrt{2}=7\sqrt{2}$
$\sqrt{150}=\sqrt{25\times 6}=\sqrt{25}\sqrt{6}=5\sqrt{6}$
$\sqrt{108}=\sqrt{4\times 27}=\sqrt{4}\times\sqrt{27}=2\sqrt{27}=2\sqrt{9\times 3}=2\times 3\times\sqrt{3}=6\sqrt{3}$ (il y a plus simple !)
$5\sqrt{96}=5\sqrt{16\times 6}=5\times 4\sqrt{6}=20\sqrt{6}$

Cas général

- $E=3\sqrt{8}+2\sqrt{50}-\sqrt{128}$

On décompose chaque nombre situé sous un radical en faisant apparaître le plus grand carré parfait.

- $E=3\sqrt{4\times 2}+2\sqrt{25\times 2}-\sqrt{64\times 2}$
  On utilise la formule $\sqrt{a\times b}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$
- $E=3\sqrt{4}\times\sqrt{2}+2\sqrt{25}\times\sqrt{2}-\sqrt{64}\times\sqrt{2}$
  On calcule les racines carrés des carrés parfaits
- $E=3\times 2\sqrt{2}+2\times 5\sqrt{2}-8\sqrt{2}$
  $E=6\sqrt{2}+10\sqrt{2}-8\sqrt{2}$
  On calcule les termes de « même nature »
- $E=8\sqrt{2}$

V. Équation

Exemple

Trouve les solutions de $x^2=36$.

On trouve facilement que pour $x=6$, on a $6^2=36$; donc 6 est une solution.

Il y a une autre solution moins visible, c'est -6. En effet : $(-6)^2=(-6)\times(-6)=36$.

Justification :

$x^2=36$

$x^2-36=36-36$

$x^2-36=0$

$x^2-6^2=0$ (on reconnaît $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$)

$(x+6)(x-6)=0$ (on a une équation produit)

Si un produit de facteurs est nul, l'un de ces deux facteurs est égal à zéro.

- Soit $x+6=0$
  $x=-6$
- Soit $x-6=0$
  $x=6$

On retrouve les deux solutions.

Propriété

a représente un nombre positif.

Les solutions de l'équation $x^2=a$ sont $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.

Exemples

Il y a deux types d'exemples.

- Soit a est un carré parfait : les solutions de $x^2=144$ sont 12 et -12.

- Soit a n'est pas un carré parfait : les solutions de $x^2=13$ sont $\sqrt{13}$ et $-\sqrt{13}$

VI. Remplacer dans une expression

Exemple 1

On considère $A=-2x^2+7x-8$. Calcule A pour $x=\sqrt{2}$.

$A=-2(\sqrt{2})^2+7\sqrt{2}-8$

$A=-2\times2+7\sqrt{2}-8$

$A=-4+7\sqrt{2}-8$

$A=-12+7\sqrt{2}$

VII. Rappels sur les puissances (exemples)

Exemple 1

$A=2^{-5}\times 4^{3}\times 8^{5}$

$A=2^{-5}\times (2^{2})^{3}\times (2^{3})^{5}$

$A=2^{-5}\times 2^{6}\times 2^{15}$

$A=2^{-5+6+15}$

$A=2^{16}$

Règles de calcul

$a^{n}\times a^{p}=a^{n+p}$

$\dfrac{a^{n}}{a^{p}}=a^{n-p}$ ou encore $\dfrac{a^{n}}{a^{-p}}=a^{n+p}$

$(a^{n})^{p}=a^{np}$

Exemple 2

$B=\dfrac{49\times 10^{3}\times 6\times 10^{-8}}{14\times 10^{-2}}$

$B=\dfrac{49\times 6}{14}\times \dfrac{10^{3}\times 10^{-8}}{10^{-2}}$

$B=\dfrac{7\times 7\times 2\times 3}{2\times 7}\times \dfrac{10^{-5}}{10^{-2}}$

$B=21\times 10^{-3}$

$B=0{,}021$ (écriture décimale)

$B=(2{,}1\times 10^{1})\times 10^{-3}$ (on remplace 21 par $2{,}1\times 10^{1}$)

$B=2{,}1\times 10^{1-3}$

$B=2{,}1\times 10^{-2}$ (écriture scientifique)