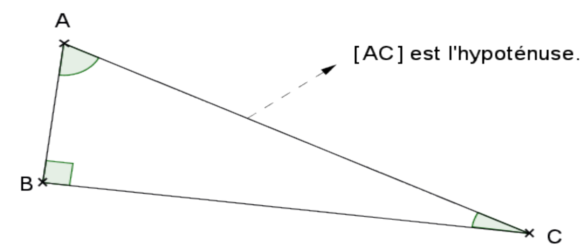
Chapitre n°7 : « Trigonométrie »

I. Formules trigonométriques

1/ Rappels de 4ème

Vocabulaire du triangle rectangle

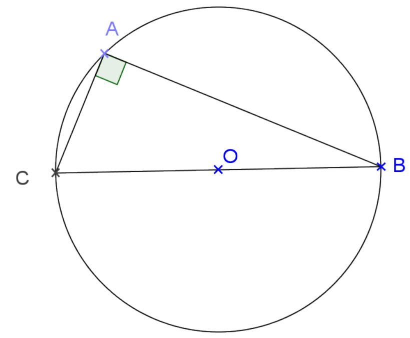
- **Un triangle rectangle est un triangle qui possède un angle droit.**
- **L'hypoténuse est le côtés situé en face de l'angle droit :** $[AC]$ **sur la figure.**



- **Dans un triangle rectangle, les deux angles aigus sont complémentaires :** $\widehat{BAC}+\widehat{BCA}=90°$

Propriétés

- **Pythagore :** $AB^2+BC^2=AC^2$.
- **Si un triangle est inscrit dans un cercle et que l'un de ses côtés est un diamètre alors il est rectangle (voir figure)**



2/ Formules de trigonométrie

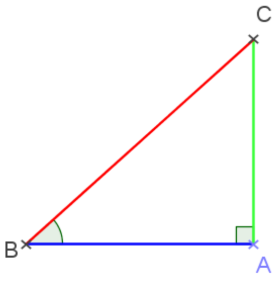
a. Cosinus

Définition

Dans un triangle rectangle, le cosinus d'un angle aigu est égal au quotient du côté adjacent (à l'angle aigu !) sur l'hypoténuse.

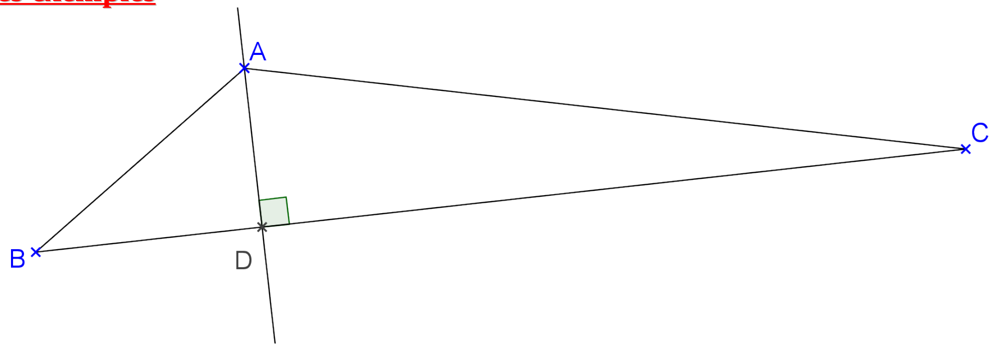
Illustration/Notation

On considère un triangle ABC rectangle en A



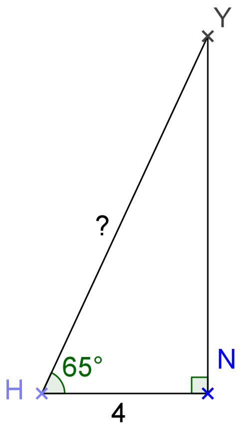
- $\cos(\widehat{ABC}) = \frac{AB}{BC}$
- $\cos(\widehat{ACB}) = \frac{CA}{BC}$

Autres exemples



- **Dans le triangle BAD rectangle en D**
  $\cos(\widehat{DBA}) = \frac{BD}{AB}$ **;** $\cos(\widehat{DAB}) = \frac{AD}{BA}$
- **Dans le triangle ADC rectangle en D**
  $\cos(\widehat{DCA}) = \frac{CD}{AC}$ **;** $\cos(\widehat{DAC}) = \frac{AD}{AC}$

Exemple type 1 : calcul de l'hypoténuse

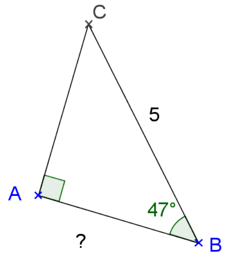


- **1ère étape : « On décrit la configuration »**
  On peut appliquer le cosinus dans le triangle HNY rectangle en N.
- **2ème étape : « On donne la formule du cosinus »**
  $\cos(\widehat{YHN}) = \frac{HN}{HY}$
- **3ème étape : « On remplace puis on calcule »**
  $\cos(65) = \frac{4}{HY}$
  $\frac{\cos(65)}{1} = \frac{4}{HY}$
  $\cos(65) \times HY = 4 \times 1$ **(produits en croix)**

$\cos(65) \times HY = 4$
$HY = \dfrac{4}{\cos(65)}$

- **<u>4ème étape</u> : « On donne une valeur arrondie avec la calculatrice »**
  Calculatrice : $4 \div \cos(65) \approx 9{,}46480633...$
  $HY \approx 9{,}5\ cm$ **(arrondi au millimètre près)**

<u>Exemple type 2 : calcul du côté adjacent</u>



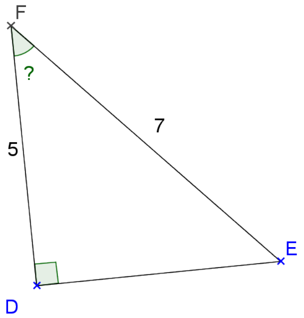
- ABC **est rectangle en** A**, on peut donc appliquer le cosinus.**

- $\cos(\widehat{ABC}) = \dfrac{AB}{CB}$

- $\cos(47) = \dfrac{AB}{5}$
  $\dfrac{\cos(47)}{1} = \dfrac{AB}{5}$
  $1 \times AB = 5 \times \cos(47)$
  $AB = 5 \times \cos(47)$

- $AB \approx 3{,}4\ cm$ **(arrondi au dixième)**

<u>Exemple type 3 : calcul d'un angle</u>



- **Dans le triangle** DEF **rectangle en** D**, on applique le cosinus.**

- $\cos(\widehat{EFD}) = \dfrac{FD}{FE}$
  $\cos(\widehat{EFD}) = \dfrac{5}{7}$

- **On utilise la touche « inverse » cosinus qui permet de trouver la mesure de l'angle.**
  Selon les calculatrice : $Arccos$, Acs **ou** $\cos^{-1}$ **(grâce à la touche** $SECONDE$**)**
  $Acs\left(\dfrac{5}{7}\right) \approx 44{,}4153...$

- $\widehat{EFD} \approx 44°$ **(arrondi au degré près)**

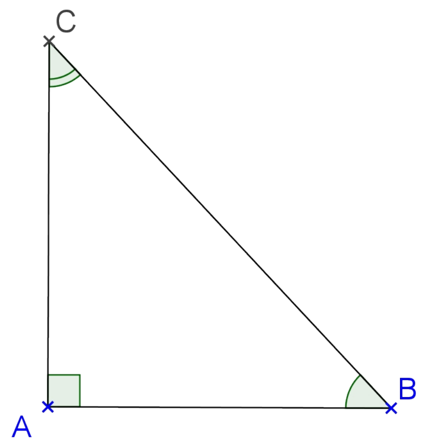
b. Sinus

Définition

Le sinus d'un angle aigu est égal au quotient du côté opposé sur l'hypoténuse.

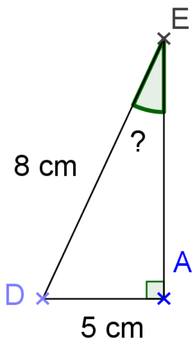
Illustration/Notation

- $\sin(\widehat{ABC}) = \dfrac{AC}{BC}$
- $\sin(\widehat{ACB}) = \dfrac{AB}{BC}$



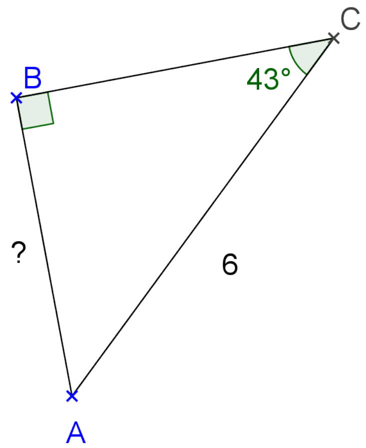
Exemple type 1

- **On applique le sinus dans le triangle AED rectangle en A.**
- $\sin(\widehat{DEA}) = \dfrac{DA}{DE}$
- $\sin(\widehat{DEA}) = \dfrac{5}{8}$
- **On utilise la touche « inverse sinus » : $Arcsin$ ou $\sin^{-1}$ pour déterminer la valeur de l'angle.** $\widehat{DEA} \approx 39°$ **(arrondi au degré près)**



Exemple type 2

- **On applique le sinus dans le triangle CBA rectangle en B.**



- $\sin(\widehat{BCA}) = \frac{BA}{AC}$
- $\sin(43) = \frac{BA}{6}$
- $\frac{\sin(43)}{1} = \frac{BA}{6}$
  $\sin(43) \times 6 = BA \times 1$
  $BA = \sin(43) \times 6$
- $BA \approx 4{,}1\ cm$ **(arrondi au millimètre près)**

Exemple type 3

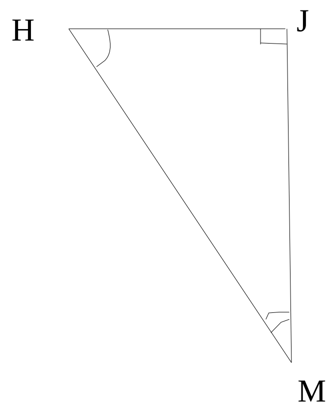
- **On applique le sinus dans le triangle IEM rectangle en E.**
- $\sin(\widehat{EIM}) = \frac{EM}{IM}$
- $\sin(33) = \frac{7{,}5}{IM}$
- $\frac{\sin(33)}{1} = \frac{7{,}5}{MI}$
  $\sin(33) \times MI = 7{,}5 \times 1$
  $\sin(33) \times MI = 7{,}5$
  $MI = \frac{7{,}5}{\sin(33)}$
- $MI \approx 13{,}8\ cm$ **(arrondi au dixième)**

c. Tangente

Définition

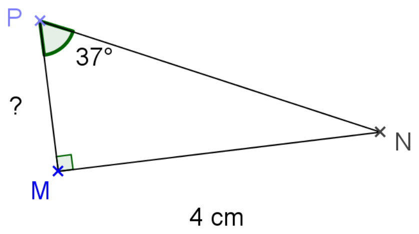
Dans un triangle rectangle, la tangente d'un angle aigu est égale au quotient du côté opposé sur le côté adjacent.

Exemple



- $\tan(\widehat{JHM}) = \dfrac{JM}{JH}$
- $\tan(\widehat{JMH}) = \dfrac{HJ}{JM}$

Exemple type 1



- **On applique la tangente dans le triangle MNP rectangle en M.**
- $\tan(\widehat{MPN}) = \dfrac{MN}{PM}$
- $\tan(37) = \dfrac{4}{PM}$

  $\dfrac{\tan(37)}{1} = \dfrac{4}{PM}$

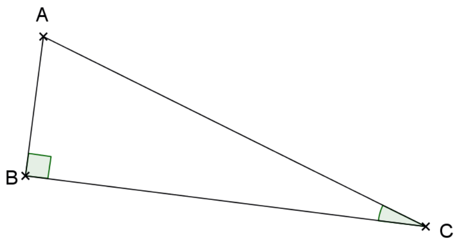
  $PM \times \tan(37) = 4 \times 1$

  $PM \times \tan(37) = 4$

  $PM = \dfrac{4}{\tan(37)}$
- $PM \approx 5{,}3\,cm$ **(arrondi au millimètre)**

II. Relations trigonométriques

1/ Encadrement de cosinus et sinus



Dans ce triangle, on a $\cos(\widehat{BCA})=\frac{BC}{CA}$.
Or la longueur CA est supérieure à la longueur BC car CA est la longueur de l'hypoténuse. Donc $\frac{BC}{CA}$ est compris entre ▪ et 1.

Propriétés
Le cosinus ou sinus d'un angle aigu est toujours compris entre 0 et 1.

2/ Quelques moyens mnémotechnique

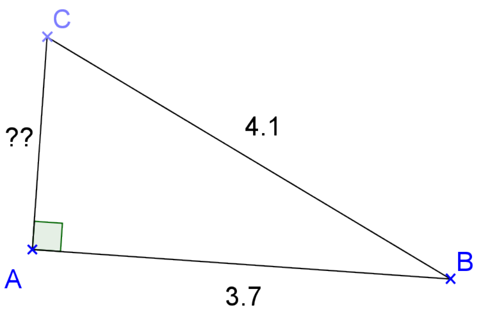
Comment faire pour retenir les trois formules de trigonométrie...

- **SOHCAHTOA : $\sin=\frac{opp}{hyp}$; $\cos=\frac{adj}{hyp}$; $\tan=\frac{opp}{adj}$.**
- **SOH signifie que le Sinus est égal au quotient du côté Opposé sur l'Hypoténuse. De même pour CAH avec le cosinus et TOA avec la tangente.**

- **Lorsqu'on connaît ou que l'on cherche l'hypoténuse, c'est forcément le cosinus ou le sinus. Sinon, c'est la tangente.**
- **L'hypoténuse est toujours au dénominateur.**

3/ Rappels sur Pythagore

Le théorème



- **ABC est un triangle rectangle en A, on applique le théorème de Pythagore.**
- $CA^2+AB^2=BC^2$
- $CA^2+3{,}7^2=4{,}1^2$

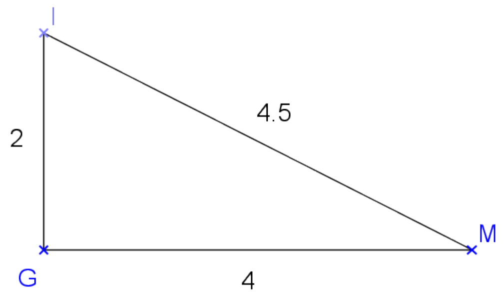
$CA^2=4{,}1^2-3{,}7^2$
$CA^2=3{,}12$

- $CA=\sqrt{3{,}12}$
On utilise la touche $\sqrt{\ldots}$ de la calculatrice. Elle affiche : $1{,}766352173\ldots$.

- $CA\approx 1{,}8\ cm$ **(arrondi au millimètre près)**

Sa réciproque

Est-ce que le triangle GIM est rectangle ?



On calcule séparément :
- $GI^2+GM^2=2^2+4^2=20$
- $IM^2=4{,}5^2=20{,}25$

On remarque que $GI^2+GM^2\neq IM^2$.
Donc le triangle n'est pas rectangle.

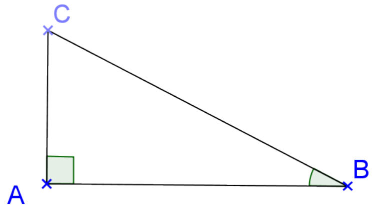
On considère maintenant un triangle POI tel que $PO=1{,}5\ cm$, $PI=2\ cm$ et $IO=2{,}5\ cm$

On calcule séparément :
- $PO^2+PI^2=1{,}5^2+2^2=6{,}25$
- $IO^2=2{,}5^2=6{,}25$

On remarque que $PO^2+PI^2=IO^2$. D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle POI est rectangle en P.

4/ Relation entre le cosinus et le sinus

Activité
D'après le théorème de Pythagore, on a :



- $AB^2+AC^2=BC^2$

Je divise chaque membre par BC^2 pour tenter de retrouver les cosinus et le sinus :

- $\frac{AB^2+AC^2}{BC^2}=\frac{BC^2}{BC^2}$

$$\frac{AB^2}{BC^2}+\frac{AC^2}{BC^2}=1$$

$$\left(\frac{AB}{BC}\right)^2+\left(\frac{AC}{BC}\right)^2=1$$

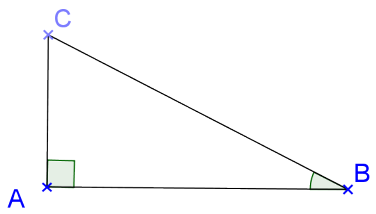
- $(\cos(\widehat{ABC}))^2+(\sin(\widehat{ABC}))^2=1$

On vérifie avec la calculatrice pour un angle quelconque : $\cos(51)^2+\sin(51)^2=1$

Propriété

a représente la mesure d'un angle aigu.
Quelque soit la valeur de a, on a $\cos(a)^2+\sin(a)^2=1$. On note aussi $\cos^2(a)+\sin^2(a)=1$

5/ Relation entre sinus, cosinus et tangente



Activité

Calculons :

- $$\frac{\sin(\widehat{ABC})}{\cos(\widehat{ABC})}=\frac{\frac{CA}{BC}}{\frac{BA}{BC}}=\frac{CA}{\cancel{BC}}\times\frac{\cancel{BC}}{BA}=\frac{CA}{BA}=\tan(\widehat{ABC})$$

Propriété

a représente la mesure d'un angle aigu. On a :

- $\tan(a)=\dfrac{\sin(a)}{\cos a}$

Pour jeudi 17 mars

Contrôle d'une heure : trigonométrie